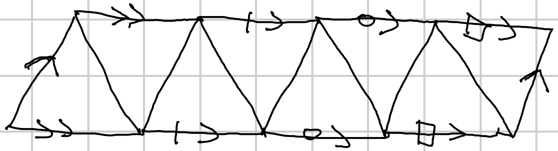
Geometria iperbolica 30-04



Prop: Sia T una triangolazione ideale orientabile tale che tutti gli spigoli hanno valenza 6.
Il punto $(e^{\frac{\pi i}{3}}, \dots, e^{\frac{\pi i}{3}})$ è una soluzione alle equazioni di consistenza e completezza, e definisce una metrica iperbolica completa e di vol $< +\infty$.

Esempio: Sia $M = S^3 \setminus \{\text{figura } 8\}$.

Fatto: $H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(M) \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "\varphi_n"'] & H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

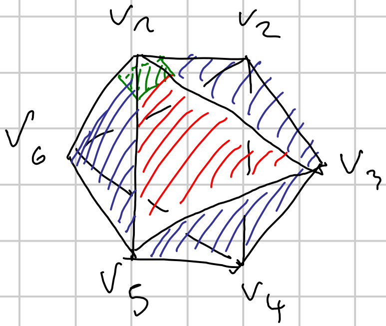
$\ker(\varphi_n)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(M)$ di indice n.

$\ker(\varphi_n)$ definisce una varietà iperbolica $M_n = \mathbb{H}^n / \ker(\varphi_n)$ riveste M con indice n.

Possiamo sollevare la triangolazione ideale di M a M_n, ottenendo una triangolazione con $2n$ tetraedri.

Esempio: Varietà ottaedrali.

$\mathcal{O}$ = Ottaedro ideale regolare iperbolico

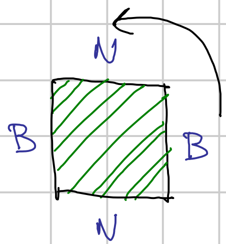


$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \in S^2 = \partial_\infty \mathbb{H}^3.$$

$$\mathcal{O} = \mathrm{Conv}(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\})$$

Fatto: $\mathcal{O}$ è ad angoli retti (facce adiacenti si incontrano perpendicolarmente).

Figura vertice è un quadrato



Prop: Sia M una 3-varietà ottenuta

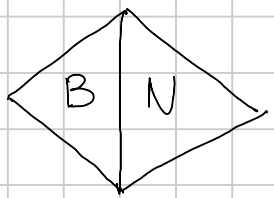
1) Identificando un numero finito di ottaedri lungo le facce.

2) Rimuovendo i vertici del complesso così ottenuto.

Se tutti gli spigoli hanno valenza 4, allora M ammette una metrica iperbolica completa di volume finito.

Dim: Figura vertice è un toro tassellato in quadrilateri, con tutti i vertici di valenza 4. Realizzando ogni quadrilatero come un quadrato otteniamo una struttura euclidea sul toro.

Esempio: Un ottaedro ammette una colorazione a "scacchiera" (checkerboard coloring) con due colori bianco (B) e nero (N), tale che se due facce sono adiacenti lungo uno spigolo hanno colori diversi.



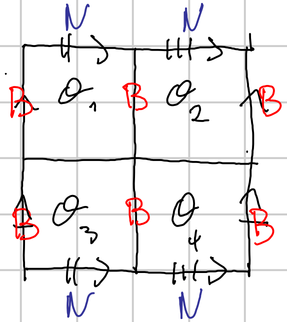
Costruiamo una varietà tassellata da 4 copie dell'ottaedro.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_1 \arrow[r, leftrightarrow, "B"] \arrow[d, leftrightarrow, "N"'] & \mathcal{O}_2 \arrow[d, leftrightarrow, "N"] \\
\mathcal{O}_3 \arrow[r, leftrightarrow, "B"'] & \mathcal{O}_4
\end{tikzcd}
$$

(Usiamo sempre l'isometria data dall'identità).

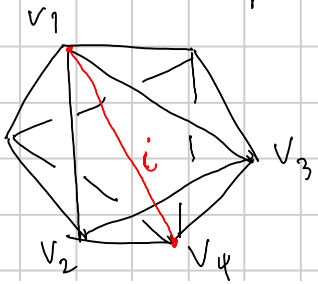
Gli spigoli hanno tutti valenza 4.

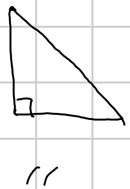
Figura vertice



Altro modo:

1) Suddividiamo ogni ottaedro in 4 tetraedri ideali (non regolari)





$\rightsquigarrow$ Otteniamo tetraedri con angoli complessi $i, \frac{1}{1-i} = \frac{i+1}{2}, \frac{i-1}{i} = 1+i$

e sono soluzioni alle equazioni di completezza
e consistenza

3-varietà iperboliche chiuse

Dehn filling:

Sia M una 3-varietà orientabile t.c. $M = \mathrm{int}(N)$

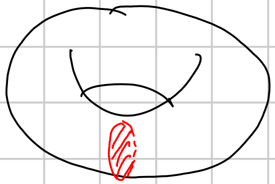
N 3-varietà orient. compatta, $\partial N = T_1 \cup \dots \cup T_c$ (unione disgiunta di tori).

e ogni toro nel bordo di N è π_1-iniettivo in N.

N_u

SI fornisce una struttura di varietà iperbolica

NO N = toro solido



1) Fissiamo per ogni toro $T_i \subset \partial N$ m_i e l_i generatori di $\pi_1(T_i)$ $i=1,\dots,c$

Un Dehn filling di M lungo T_i è una varietà M' ottenuta nel modo seguente:

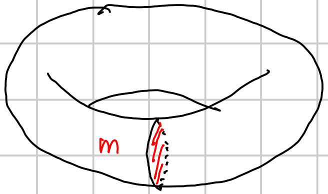
2) Fissiamo $\varphi : \partial(D^2 \times S^1) = T^2 \longrightarrow T_i$ un diffeomorfismo.

$$M' = \frac{N \sqcup (D^2 \times S^1)}{\sim \varphi} = M_\varphi \quad x \sim \varphi(x) \quad \forall x \in \partial(D^2 \times S^1)$$

Il risultato dipendeva dalla scelta del diffeomorfismo φ.

Dati φ_1, φ_2 diffeomorfismi, quando M_{φ_1} e M_{φ_2} sono diffeomorfe?

Prop: M_{φ_1} e M_{φ_2} sono diffeomorfe $\Leftarrow$ $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \partial(D^2 \times S^1) \to \partial(D^2 \times S^1)$ si estende a un diffeomorfismo del toro solido $D^2 \times S^1$ $\Leftrightarrow$ φ fissa il meridiano $\partial D^2 \times \{p\}$



Corollario: Il Dehn filling di M lungo T_i è determinato dalla sola immagine del meridiano del toro solido $\varphi(m) = p \cdot m_i + q \cdot l_i$

Scegliendo una curva $\gamma_i = p_i m_i + q_i l_i$ $\left(\frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\right)$ per ogni $i = 1, \dots, c$

e facendo, per ogni toro T_i, un Dehn filling lungo γ_i, costruiamo una

3-varietà $\rightsquigarrow M_{fill}$

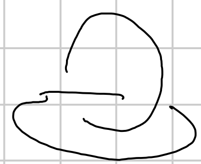
$\rightsquigarrow$ Parametri per il Dehn filling $s = (s_1, \dots, s_c)$ $s_i \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

(Convenzione: Se $s_i = +\infty$ non facciamo nulla).

Se $\forall i$, $s_i \in \mathbb{Q}$, otteniamo una varietà chiusa

Teo. (Lickorish-Wallace): Ogni 3-varietà orientabile chiusa si ottiene

come Dehn filling su un link in S^3.



Equazioni modificate per il Dehn filling

T triangolazione ideale orientata di $M = \text{int}(N)$

$s = (s_1, \dots, s_c)$ parametri di Dehn filling.

T definita da n tetraedri $\Delta_1, \dots, \Delta_n$

Scegliamo per ogni tetraedro Δ_i uno spigolo e un angolo complesso

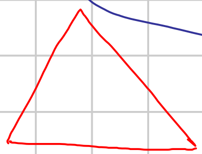
$z_i \in \mathbb{C}$ t.c. $\text{Im}(z) > 0$.

Determiniamo tutti gli angoli complessi tramite $z_i, \frac{1}{1-z_i}, \frac{z_i - 1}{z_i}$.

Li scriviamo in coordinate polari $\rho \cdot e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $\theta \in (0, \pi)$,

li vediamo come elementi di $\widetilde{\mathbb{C}}^* = \{ \rho e^{i\theta} / \rho \in \mathbb{R}_{>0}, \theta \in \mathbb{R} \}$

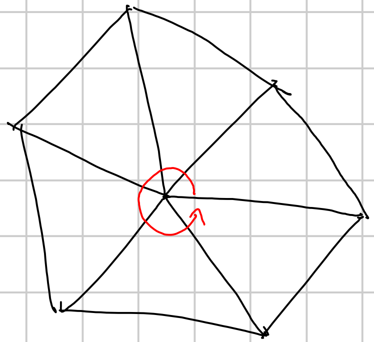
$\hookrightarrow$ $\boxed{z_1 z_2 z_3 = e^{\pi i}}$



$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbb{C}}^* \arrow[d, "p"'] \arrow[r, shift right, "\log"'] & \mathbb{C} \arrow[l, shift right, "\exp"'] \\
\mathbb{C}^* &
\end{tikzcd}
$$

Lungo ogni spigolo w abbiamo le equazioni di consistenza in $\widetilde{\mathbb{C}^*}$

$$\underbrace{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_h}_{\text{angoli complessi intorno allo spigolo } w} = e^{2\pi i} \neq 1$$



Supponiamo equaz. di consistenza soddisfatte.

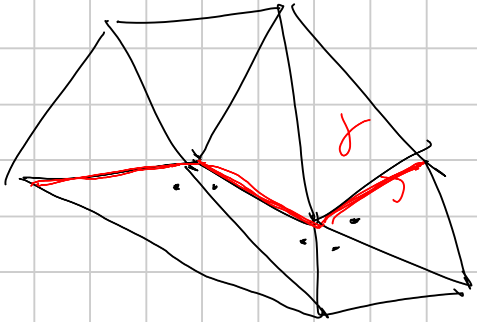
Abbiamo un omomorfismo $\mu : \pi_1(T_i) \to \mathbb{C}^*$

Solleviamo μ a $\tilde{\mu} : \pi_1(T_i) \to \widetilde{\mathbb{C}^*}$

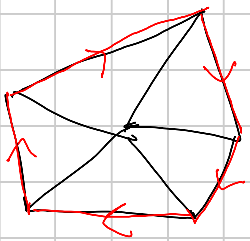
• Rappresentiamo $\gamma \in \pi_1(T_i)$ come un cammino simpliciale.

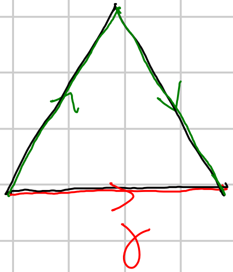
Definiamo $\tilde{\mu}(\gamma) = e^{(2-|\gamma|)\pi i} \cdot \prod z_i$

angoli complessi che γ incontra alla sua dx



$\tilde{\mu} : \pi_1(T_i) \to \tilde{\mathbb{C}}^*$ è ben definita ed è un omeomorfismo

1)  γ $\tilde{\mu}(\gamma) = 1$

2 

non cambia $\tilde{\mu}$.

Equazioni modificate di completezza rispetto ai parametri di Dehn filling.

- Se $s_i = +\infty$, chiediamo $\tilde{\mu}(m_i) = \tilde{\mu}(l_i) = 1$. $\rightsquigarrow$ produrre una cuspide

- Se $s_i = (p,q)$, $q \neq 0$ p,q coprimi

Chiediamo $\tilde{\mu}(m_i)^p \cdot \tilde{\mu}(l_i)^q = e^{2\pi \cancel{i} 1} \rightsquigarrow \tilde{\mu}(p \cdot m_i + q \cdot l_i) = e^{2\pi i}$

$p \cdot m_i + q \cdot l_i \in \pi_1(T_i)$ una volta fatto il Dehn filling diventa banale in M_{fill}.

È naturale chiedere che l'olonomia nella metrica incompleta di $p \cdot m_i + q \cdot l_i$ sia banale.

$$G = \{ \varphi \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \mid \varphi(\infty) = +\infty \}$$

$$1 \to \mathbb{R}^2 \to G \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^* \to 1$$

parabolici che fissano $+\infty$

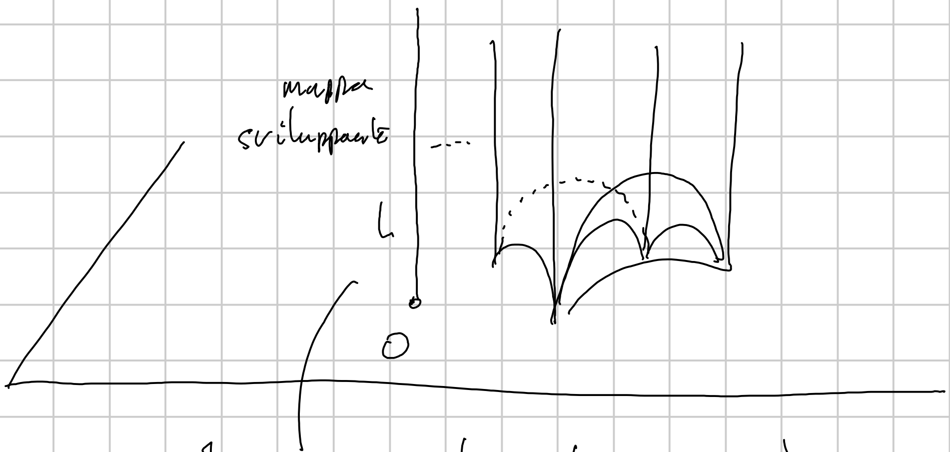
dilatazione

$$p : \widetilde{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}^*$$

olonomia $\pi_1(T) \xrightarrow{h} G$ $\qquad \mu(\gamma) = p(\pi(h(\gamma)))$ $\qquad \gamma \in \pi_1(T)$

$$h(p \cdot m_i + q \cdot l_i) = 1 \Rightarrow \mu(p \cdot m_i + q \cdot l_i) = 1$$

Teorema: Una soluzione $z = (z_1, \dots, z_n)$ alle equazioni di consistenza e completezza determina una struttura iperbolica su M il cui completamento $\overline{M}$ è una varietà iperbolica completa diffeomorfa M_{fill}.



$\exists$ la mappa sviluppante $\pi_1(T)$ agisce su $\mathbb{C}$ tramite roto traslazioni

$\mu : \pi_1(T) \to \mathbb{C}^*$

Teo: Dehn filling iperbolico

Sia $M = \mathrm{int}(N)$ 3-varietà orientabile cplt vol $< +\infty$.

$\forall\, i = 1, \dots, c = \#$ cuspidi, $\exists$ un insieme finito S_i di pendenze tali che ogni Dehn filling di parametri $s = (s_1, \dots, s_c)$ t.c. $s_i \notin S_i$ $\forall i$, la varietà M_{fill} è iperbolica.